1.3.2 **Matrixdarstellung des Hayekschen Dreiecks**

Im Folgenden wird eine prinzipielle Möglichkeit aufgezeigt, das Hayeksche Dreieck (HD), das ein wesentliches Denkwerkzeug in den Überlegungen des späteren Nobelpreisträgers zur Überinvestitionstheorie (ÜIT) darstellt, auf dem Boden des eben entwickelten Mengenmodels (MM) zu rekonstruieren und damit theoretisch überflüssig zu machen. Modelliert wird zunächst eine Volkswirtschaft mit $n=5$ Branchen oder Zweigen, ein Beispiel, das Hayek benutzt, um den Leser in seine Theorie einzuführen. In den ersten vier Branchen werden Produktionsmittel hergestellt, während der letzte Zweig Konsumgüter erzeugt. Die entsprechenden Mengen lassen sich bei unverzerrten (inflationär nicht belasteten) Preisen und einer Normierung aller Preise auf Eins durch den folgenden Outputvektor darstellen:

$$\mathbf{q}=\begin{bmatrix}8 & 16 & 24 & 32 & 40\end{bmatrix}.$$

Das Typische eines HD besteht darin, dass mit Ausnahme des ersten Zweiges der *i*-te Zweig ausschließlich die Produkte des vorangehenden Zweiges (*i*-1) verbraucht. Einschränkend muss gesagt werden, dass dies nur für die Produktionsmittel gilt. Da die Zweige im Rahmen des hier entwickelten MM durch die Zeilen und die verschiedenen Produkte durch die Spalten repräsentiert werden, führt das auf eine Produktionsmittelmatrix der folgenden Gestalt:

$$\mathbf{Z}=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 16 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 24 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 32 & 0\end{vmatrix}$$

Im Mengenmodell wird der Konsum zweckmäßigerweise separat vom Produktionsmittelverbrauch **Z** mit Hilfe der Matrix **D** (Gleichung 26) erfasst. Da wir nicht wissen können, wie Hayek die Faktoren auf die verschiedenen Zweige verteilt hätte, nehmen wir eine Gleichverteilung von gleich gut qualifizierten Arbeitskräften an. Eine solche Annahme ist aufgrund der in der ÜIT unterstellten identischen Wertschöpfung und des identischen Konsums der Agenten jeder Branche naheliegend, wenn auch nicht zwingend. Demnach gilt

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

Die technologische Matrix **A** ergibt sich nach Gleichung (1.11) durch Dividieren jeder Zeile von Z durch den Output des entsprechenden Zweiges:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4/5 & 0 \end{vmatrix}$$

Bei der Anwendung muss beachtet werden, dass ein HD die Bedingung (8) für die lineare Unabhängigkeit der Zeilen einer technologischen Matrix nicht erfüllt. Da die Inverse Matrix nicht existiert, sind alle Formeln, die sie benutzen, nicht anwendbar. Das ist ein spezielles Beispiel für die begrenzte Anwendbarkeit des HD.

Die Matrix für den Lebensmittelverbrauch einer Durchschnittsarbeitskraft von links multipliziert mit dem Arbeitseinsatz je Bruttoprodukt – dem Kehrwert der Produktivität berechnet man auf der Grundlage von (1.28) und erhält:

$$\{\mathbf{a_0}\}\chi = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{D} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 \end{vmatrix}$$

Die zusammenfassende Matrix $\mathbf{\Phi}$ stellt sich als Summe der letzten beiden Matrizen dar:

$$\mathbf{\Phi} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 4/5 & 1/5 \end{vmatrix}$$

Probehalber multiplizieren wir diese Matrix von links mit dem Output **q** und sollten dann den gesamten Verbrauch **v** erhalten:

$$[8 \quad 16 \quad 24 \quad 32 \quad 40] \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 4/5 & 1/5 \end{vmatrix} = [8 \quad 16 \quad 24 \quad 32 \quad 40]$$

Der Verbrauch stimmte demnach mit dem Output überein: Es handelt sich um eine *stationäre* Wirtschaft. Genau eine solche wollte Hayek mit seinem ersten, grundlegenden Dreieck darstellen. Was er wohl nicht wusste war, dass sich diese Volkswirtschaft auf dem idealen Wachstumspfad befindet. Doch die Wachstumsrate ist wegen $\lambda = 1$ gleich Null. Anhand der Struktur der Matrix **A** wird klar, welchen Bedingungen eine Volkswirtschaft genügen muss, um mit einem HD dargestellt werden zu können: 16 Knotenpunkte in der Verflechtungsstruktur der Investitionsgüterindustrie müssen Null gesetzt werden können, lediglich 4 dürfen Werte verschieden von Null annehmen. Dies sind enorm restriktive Bedingungen.

Die zweite Version eines HD beruht auf „freiwilligem Sparen“, das eine ausgedehnte Investition in längere Produktionsumwege ermöglicht: Die Zahl der Branchen erhöht sich von 5 auf 7. Dieser Prozess – so er denn stattfindet – kann als ein Aspekt der Evolution einer Volkswirtschaft angesehen werden. Im Rahmen des Nelson-Winter-Modells wird er durch die Gründung und die Elimination von Firmen berücksichtigt (Quaas 2012).

Die Darstellung der Mengenverhältnisse des zweiten HD beruht auf den Ergebnissen einer textnah vorgenommenen Interpretation (Hayek 1931), die weiter oben vorgenommen wurde. Demnach dürfte sich der Outputvektor mengenmäßig wie folgt strukturieren:[1]

[1] Dabei handelt es sich um gerundete Werte für die rationale Zahl 90/14, die sich aus dem Wertzuwachs 30/7 je Stufe multipliziert mit dem Produktivitätszuwachs von 1,5 ergibt.

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 6{,}4 & 12{,}9 & 19{,}3 & 25{,}7 & 32{,}1 & 38{,}6 & 45{,}0 \end{bmatrix}$$

Der Produktionsmittelverbrauch muss mit Hilfe einer (7,7)-Matrix notiert werden. Der Verbrauch des ersten Zweiges ist Null, der zweite verbraucht gerade so viel, wie der erste herstellt, usw. – Daraus ergibt sich folgende Struktur:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6{,}4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12{,}9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 19{,}3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25{,}7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 32{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 38{,}6 & 0 \end{bmatrix}$$

Der Lebensmittelverbrauch ist in allen Branchen gleich und entspricht dem Realwert des jeweiligen Faktoreinkommens:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6{,}4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6{,}4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6{,}4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6{,}4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6{,}4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6{,}4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6{,}4 \end{bmatrix}$$

Die Matrix $\mathbf{\Phi}$ ergibt sich in Analogie zu den obigen Überlegungen nach Division der letzten beiden Matrizen durch das jeweilige Bruttoprodukt und anschließender Addition der resultierenden Matrizen oder als Verallgemeinerung der Verbrauchsmatrix, die wir im Fall einer stationären Volkswirtschaft errechnet haben:

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 4/5 & 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/6 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6/7 & 1/7 \end{bmatrix}$$

Wie sich zeigt, sind die beiden Verbrauchsmatrizen nicht so verschieden wie es den ersten Anschein zu vermuten wäre: Sie folgen derselben Regel und stellen damit eine sehr spezielle Struktur einer Volkswirtschaft dar, die in der Realität kaum vorzufinden sein wird. Trotzdem ist es wichtig, dass auch diese und andere von Hayek analysierten Beispiele durch die allgemeine Theorie rekonstruiert werden können.

2.10 **Projektion der beiden Hayekschen Dreiecke auf das 2-Sektoren-Modell**

Die oben mit Hilfe des *n*-Branchen-Modells entwickelte Modellierung der beiden Hayekschen Dreiecke für (i) eine stationäre Volkswirtschaft und (ii) für eine ebenfalls stationäre Volkswirtschaft, die sich nach freiwilligem Sparen durch die Konsumenten einstellen soll, führt zu Matrizen, die insofern unvergleichbar sind, als sie unterschiedliche Dimensionen aufweisen. Eine Vergleichbarkeit kann auf zweierlei Weise hergestellt werden: Einmal dadurch, dass man beide Modelle in ein System mit mindestens so vielen Zweigen einbettet, wie die Volkswirtschaft der höchsten Dimension enthält. Zum anderen dadurch, dass man einige Zweige zu Sektoren zusammenfasst. Da Hayek die Zusammenfassung zweier und auch aller Zweige in ein einziges Unternehmen erwägt, gehen wir hier den zweiten Weg. Das bedeutet, dass die jeweils ersten 4 bzw. 6 Zweige zu einem Sektor zusammengefasst werden.

2.10.1 **Stationäre Volkswirtschaft Nr.1**

Der Output ist nach Aggregation der ersten 4 Zweige durch den Zeilenvektor

$$Q = \begin{bmatrix} 80 & 40 \end{bmatrix}$$

gegeben. Der Produktionsmittelverbrauch wird durch die Matrix

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 48 & 0 \\ 32 & 0 \end{bmatrix}$$

bzw. durch

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3/5 & 0 \\ 4/5 & 0 \end{bmatrix}$$

erfasst. Der produktionsbedingte Konsum hat die Struktur

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 32 \\ 0 & 8 \end{bmatrix},$$

die auch je Bruttoprodukt formuliert werden kann:

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 2/5 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix}$$

Zusammenfassend ergibt sich der Operator

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 4/5 & 1/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{bmatrix}$$

Die Probe wird dem Leser, der bis hierher gefolgt ist, nicht schwer fallen: Es gilt

$$\mathbf{q\Phi} = \mathbf{v} = \mathbf{q}\,,$$

wie es sich für eine stationäre Volkswirtschaft gehört. Es ist leicht zu sehen, dass sich eine solche Volkswirtschaft auf dem idealen Wachstumspfad befindet: Der Eigenwert des Systems hat den Wert $\lambda = 1$.

2.10.2 **Stationäres Modell nach freiwilligem Sparen**

Der Bruttoproduktvektor ist nach der Analyse in (Quaas 2013) gegeben durch:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 135 & 45 \end{bmatrix}$$

Der Produktionsmittelverbrauch der beiden Sektoren wird dargestellt durch

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 96,4 & 0 \\ 38,6 & 0 \end{bmatrix}$$

Der Lebensmittelverbrauch gliedert sich nach der Zusammenfassung der ersten 6 Zweige wie folgt:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 40 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Schließlich erhalten wir $\mathbf{\Phi}$ nach Division von Z und D durch das Bruttoprodukt und Addition der beiden dann erhaltenen Matrizen:

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 0,71 & 0,30 \\ 0,86 & 0,11 \end{bmatrix}$$

Vergleicht man jetzt die beiden Verbrauchsmatrizen, wird deutlich, dass nicht nur eine Veränderung der Struktur stattgefunden hat, sondern dass alle Verbrauchskoeffizienten der Konsumgüter gesenkt worden sind, was auf eine höhere Effektivität des Konsums schließen lässt.