Georg Quaas (Leipzig, Juli 2012)

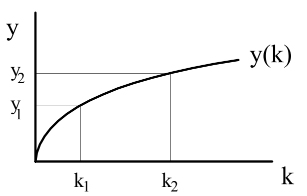
Materialien zur Kritik der neoklassischen Theorie. Die Produktions-funktion

Vorbemerkung

Unter „Kritik“ wird hier die Konfrontation einer Theorie mit der Empirie verstanden. Diese beschränkt sich nicht auf die ökonometrische Schätzung einer Gleichung mit anschließender Auswertung der Resultate, sondern erfordert eine etwas umfassendere Einordnung in den theoretischen und empirischen Kontext, wobei in dieser Studie der Fokus auf die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion gelegt wird. Eine Diskussion der empirischen Entscheidungen, die für eine sinnvolle Konfrontation einer Theorie mit der „Wirklichkeit“ erforderlich sind, findet man andernorts.[1]

1. **Die Clark-Ramsey-Parabel / Cobb-Douglas Funktion**[2]

Die gesamtwirtschaftliche Produktionsfunktion sei durch $Y = Y(L, K)$ gegeben. Vorausgesetzt wird, daß die Produktionsfunktion skaleninvariant ist, das heißt, $Y(\alpha L, \alpha K) = \alpha Y(L, K)$. Die ökonomische Bedeutung der Skaleninvarianz besteht darin, dass der Output eine lineare Funktion vom ***gesamten*** Input ist. Daraus folgt für $\alpha = 1/L$, dass $\frac{Y}{L} = Y(1, K/L)$ gilt. Mit den Definitionen für die Produktivität (Output pro Kopf) $y = Y/L$ und für die Kapitalintensität $k = K/L$ ergibt sich aus Y die Produktionsfunktion $y = y(k)$, die die Produktivität in Abhängigkeit vom Kapitaleinsatz darstellt. Es werden abnehmende Grenzerträge angenommen, also $\frac{dy}{dk} = y' = r \succ 0$ und $y'' \prec 0$. Graphisch hat die Funktion folgende Form:



Output-Kapitalausstattung

BILD 1

[1] Georg Quaas: Das „saldenmechanische Modell“ von Fritz Helmedag und die Empirie. In: Wirtschaftsdienst. 87. Jg. (2007) H.6. S.406-412.
[2] Vgl. die Darstellungen der Neoklassik bei Alfred E. Ott / Harald Winkel: Geschichte der theoretischen Volkswirtschaftslehre. Göttingen 1985. Sowie Fritz Helmedag: Warenproduktion mittels Arbeit. Marburg 1992.

Für die Tangente an einen beliebigen Punkt k und y der Kurve gilt die Gleichung $y = w + r\,k$, wobei w als Lohn, rk als Profit je Arbeitnehmer und r als Profitrate interpretiert werden.[3] BILD 2 verdeutlicht das:

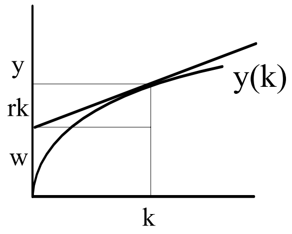


BILD 2

Es gilt:

$$r = \frac{y - w}{k}$$

Eine mögliche Interpretation von BILD 2 besteht darin, die (allgemeine) Profitrate als gegeben zu betrachten; sie entspreche dem Anstieg der Tangente am Punkt k, wobei k der Kapitaleinsatz in der betrachteten Branche ist. Der Anstieg der Tangente links von k ist größer als die allgemeine Profitrate, die Lohnsätze sind dem entsprechend geringer. Es wird folglich weiteres Kapital in die profitablere Branche fließen, das sich angesichts knapper Arbeitskräfte vor allem in einer höheren Kapitalintensität niederschlagen wird. Der Kapitaleinsatz und damit die Produktivität werden so lange erhöht, bis die Profitrate der Branche auf die allgemein übliche Profitrate gefallen ist.

Bei dieser Interpretation wird der Lohn als variabel betrachtet. Er steigt solange, bis die – bei vorgegebener Profitrate – maximale Produktivität erreicht ist.

Die Eigenschaften der Produktionsfunktion y:

(1) Der Output (das Sozialprodukt pro Kopf) wächst mit dem Kapitaleinsatz, aber die Ertragszuwächse werden kleiner.
(2) Im Gleichgewicht der vollständigen Konkurrenz stimmen die partiellen Grenzproduktivitäten mit dem Lohnsatz und der Profitrate überein. Es gilt: $Y = wA + rK$.
(3) Dimensionsprüfung zeigt, daß das Kapitalgut auch als Konsumgut verwendet wird (Samuelson bezeichnet „das Gut“ deshalb als „jelly“). (Helmedag meint, dass die Preise dann an sich überflüssig sind. Wichtiger ist die Bemerkung, dass alle hier auftretenden Größen Realgrößen sind.)

[3] Das folgt teil aus der Homogenität der Produktionsfunktion, teils aus der Theorie der Firma, insbesondere aus der Maximierung des Profits mit Hilfe der Ableitungen nach A und K: $\Pi = Y - wA - rK$.

(4) Aus den Axiomen über die erste und die zweite Ableitung der Produktionsfunktion folgt:

$$\frac{dr}{dk} = y'' \prec 0 \ .$$

D.h.: Profitrate und Kapitalintensität verhalten sich invers zueinander (siehe folgendes BILD).

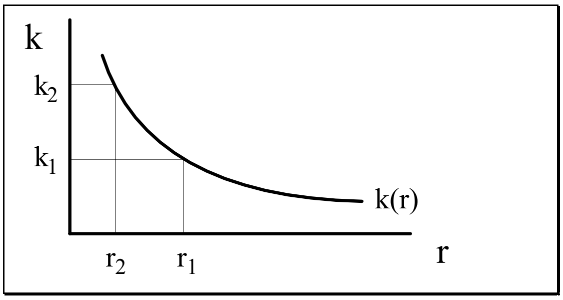


BILD 3: Die inverse Beziehung zwischen Kapital-intensität und Profitrate

Unterstellt man eine mit der Zeit zunehmende Kapitalintensität – was bei neutralem technischen Fortschritt der Fall ist (siehe Abschnitt 4) –, so kann diese Beziehung als das Analogon zu Marx' These vom tendenziellen Fall der Profitrate betrachtet werden.

(5) Outputentwicklung (Output je Arbeitseinheit!) und Profitratenentwicklung verhalten sich ebenfalls invers zueinander:

$$\frac{dy}{dr} = \frac{dy}{dk}\frac{dk}{dr} = \frac{y'}{y''} \prec 0 \ .$$

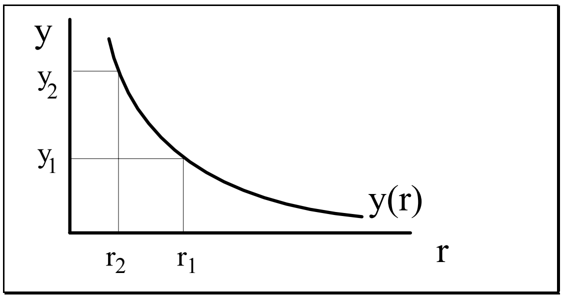


BILD 4: Die inverse Beziehung zwischen Output und Profitrate

(6) Aus $w = y - y'k$ folgt die Ableitung des Lohnes nach der Kapitalintensität

$$\frac{dw}{dk} = y' - y''k - y' = -y''k \succ 0 \ ,$$

das heißt, die Änderung des Lohnsatzes ist der Kapitalintensität gleichgerichtet. Der Kurvenverlauf ist dem der Produktionsfunktion ähnlich.

Dieser harmlos klingende Satz hat eine gravierende Bedeutung für die Beschäftigungspolitik, wenn man ihn wie folgt kausal interpretiert: Auf Erhöhungen des Reallohnes reagieren die Unternehmer mit kapitalintensiverer Technik, d.h. lebendige Arbeit wird durch Maschinen ersetzt.

Diese Konsequenz ist aus zwei Gründen kurzschlüssig:
(i) Die Wirkungsrichtung ist durch einen funktional-deterministischen Zusammenhang nicht eindeutig festgelegt.
(ii) Dass die Erhöhung der Kapitalintensität mit einer Verringerung des Arbeitseinsatzes verbunden ist, geht aus der obigen Beziehung gar nicht hervor, da das Differential *dA* nicht auftritt.

(7) Für die Beziehung zwischen Lohnsatz und Profitrate erhält man:

$$\frac{dw}{dr} = \frac{dw}{dk}\frac{dk}{dr} = \frac{-y''k}{y''} = -k \prec 0 :$$

Eine Erhöhung des Lohnsatzes führt zu einem Rückgang der Profitrate und umgekehrt.

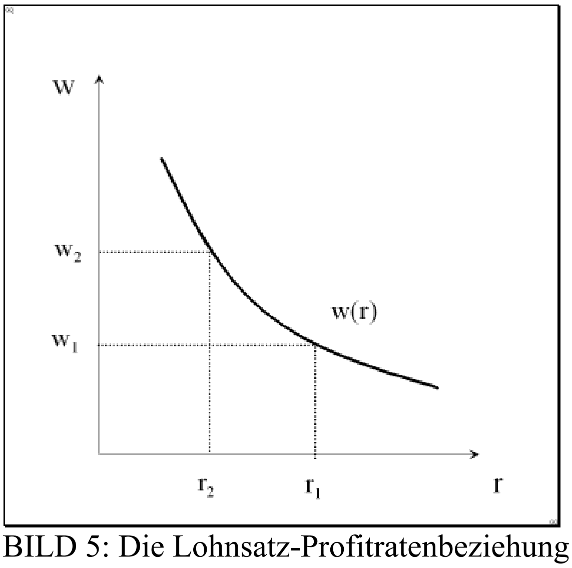


BILD 5: Die Lohnsatz-Profitratenbeziehung

Lohnbezieher stehen demnach in einem antagonistischen Zusammenhang zu den Empfängern von Kapitaleinkommen.
(8) Schließlich ergibt sich für den Zusammenhang zwischen Output (pro Kopf) und Lohnsatz der positive Zusammenhang

$$\frac{dy}{dw} = \frac{dy}{dk}\frac{dk}{dw} = \frac{r}{-y''k} \succ 0.$$

Die Löhne steigen mit der Produktivität, und zwar umso stärker, je höher die Profitrate und je geringer der Kapitaleinsatz sind.

2. **Der analytische Ansatz**[4]

Die Cobb-Douglas Produktionsfunktion wird durch die Gleichung

$$Y = K^a L^{1-a} \text{ mit } 0 < a < 1 \tag{1}$$

dargestellt. Für den Output per capita gilt also:

$$y = \frac{K^a}{L^a} = k^a. \tag{2}$$

Für die erste Ableitung nach k erhält man:

$$y' = ak^{a-1} = r \text{ oder } k = \left(\frac{a}{r}\right)^{1/(1-a)}, \tag{3}$$

woraus sich die Form der Kurve in BILD 3 ergibt. Die zweite Ableitung von y nach k, d.h.

$$y'' = a(a-1)k^{a-2} = \frac{dr}{dk} < 0, \tag{4}$$

erfüllt die eingangs geforderte Bedingung aufgrund der Wahl von a. Mit Hilfe der explizit gegebenen Produktionsfunktion lässt sich auch die zweite Ableitung von r nach k bilden:

$$\frac{d^2r}{dk^2} = a(a-1)(a-2)k^{a-3} \tag{5}$$

Während die erste Ableitung von r nach k negativ ist, wird die zweite wieder positiv. Daraus ergibt sich der inverse, asymptotische Kurvenverlauf in BILD 3.

[4] Die folgenden Ausführungen orientieren sich an Robert M. Solow: A Contribution to the Theory of Economic Growth. In: The Quarterly Journal of Economics, Vol. 70, No. 1 (Feb., 1956), pp. 65-94. Anstelle des dort für die „ratio of capital to labour" verwendeten r wird hier k benutzt, da das Symbol r schon für die Profitrate verbraucht ist.

Die zu BILD 4 gehörige Kurve entspricht der Funktion

$$y = \left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{a}{1-a}}, \tag{6}$$

die man erhält, wenn man in die (pro Kopf-) Produktionsfunktion (2) die oben aus der ersten Ableitung gewonnene Formel für *k* (siehe 3!) einsetzt. Die erste Ableitung von *y* nach *r* ist negativ,

$$\frac{dy}{dr} = \frac{dy}{dk}\frac{dk}{dr} = r\frac{dk}{dr} = r\frac{1}{1-a}\left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{1}{1-a}-1}\frac{(-a)}{r^2} = \frac{a}{(a-1)r}k\frac{r}{a} = \frac{k}{a-1}, \text{[5]} \tag{7}$$

während die zweite Ableitung positiv ist:

$$\frac{d^2y}{dr^2} = \frac{1}{a-1}\frac{dk}{dr} = \frac{1}{a-1}\frac{1}{\frac{dr}{dk}} = \frac{1}{a(a-1)^2 k^{a-2}} = \frac{k^{2-a}}{a(a-1)^2}. \tag{8}$$

Hierbei ist (4) verwendet worden. Negative erste Ableitung und positive zweite Ableitung determinieren die Form der Kurve in BILD 4.

Die Lohnfunktion (Reallohnsatz) erhält man nach Einsetzen von *y* aus (2) und *y'* aus (3) in die obige Gleichung $w = y - y'k$:

$$w = (1-a)k^a = (1-a)y. \tag{9}$$

Gleichung (9) kann übrigens von beiden Seiten gelesen werden: *y* ist eine lineare Funktion des Lohnsatzes und umgekehrt.

Die erste Ableitung der Lohnfunktion nach *k* ist

$$\frac{dw}{dk} = a(1-a)k^{a-1} = \frac{a(1-a)}{k^{1-a}}, \tag{10}$$

also positiv. Die zweite Ableitung ist

$$\frac{d^2w}{dk^2} = a(1-a)(a-1)k^{a-2} = \frac{-a(1-a)^2}{k^{2-a}} < 0, \tag{11}$$

[5] Hierbei ist $\frac{dy}{dk} = r$, der Rest ergibt sich aus der Ableitung der Funktion (3) nach *k*.

die Lohnfunktion verläuft also ähnlich wie die Produktionsfunktion.

Die Ableitung der Lohnfunktion nach der Profitrate ist oben bereits berechnet worden, kann hier aber mit Hilfe von (10) und (4) wie folgt verifiziert werden:

$$\frac{dw}{dr} = \frac{dw}{dk}\frac{dk}{dr} = \frac{a(1-a)k^{a-1}}{a(a-1)k^{a-2}} = -k\ . \tag{12}$$

Mit Hilfe des analytischen Ansatzes der Produktionsfunktion lassen sich mit (9) und (3) auch die Gleichungen für den Lohnsatz und die Profitrate ableiten:

$$\frac{\partial Y}{\partial A} = (1-a)K^a A^{-a} = (1-a)k^a = w \tag{13}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = a\frac{K^{a-1}}{A^{a-1}} = ak^{a-1} = r \tag{14}$$

Eine allgemeine Eigenschaft der Cobb-Douglas-Funktion besteht darin, dass die Lohn- und Profitanteile am Sozialprodukt y bei gegebenem Kapitaleinsatz konstant sind. Um das zu sehen, setze man die oben abgeleiteten Gleichungen für w und r ein:

$$\frac{w}{r} = \frac{(1-a)k^a}{a\,k^{a-1}} = \frac{(1-a)}{a}k \tag{15}$$

3. **Wachstums-/Gleichgewichtstheorie**

Betrachtet wird eine geschlossene Volkswirtschaft, bei der bekanntlich Sparen = Investition gilt. Es sei s die (konstante) Sparquote. Dann ist

$$\dot{K} = I = sY\ . \tag{1}$$

Andererseits erhält man aufgrund der Definition von k für die erste Ableitung von K nach der Zeit t:

$$\dot{K} = \dot{k}L + k\dot{L}\ . \tag{2}$$

Es wird angenommen, dass sich das Arbeitsvolumen L exponentiell mit der Rate n entwickelt – der Wachstumsrate der Bevölkerung:

$$L = L_0 e^{nt}, \tag{3}$$

so dass die erste Ableitung von L nach der Zeit t in Gleichung (2) spezifiziert werden kann:

$$\dot{K} = \dot{k}L_0e^{nt} + nkL_0e^{nt} \tag{4}$$

Damit folgt aus der Formel (1) bei Beachtung der Skaleninvarianz von Y:

$$\dot{k}L_0e^{nt} + nkL_0e^{nt} = sL_0e^{nt}y(k), \tag{5}$$

woraus sich die folgende Differentialgleichung ergibt:

$$\dot{k} = sy(k) - nk\,. \tag{6}$$

Ein Gleichgewicht liegt vor, wenn $\dot{k} = 0$ ist. Der Nachweis, dass sich die betrachtete Volkswirtschaft auf das Gleichgewicht zu bewegt, kann geometrisch geführt werden. Dazu wird die Grade *nk* in das Bild der Clark-Ramsey-Parabel (letztere multipliziert mit der Sparquote *s*) eingetragen:

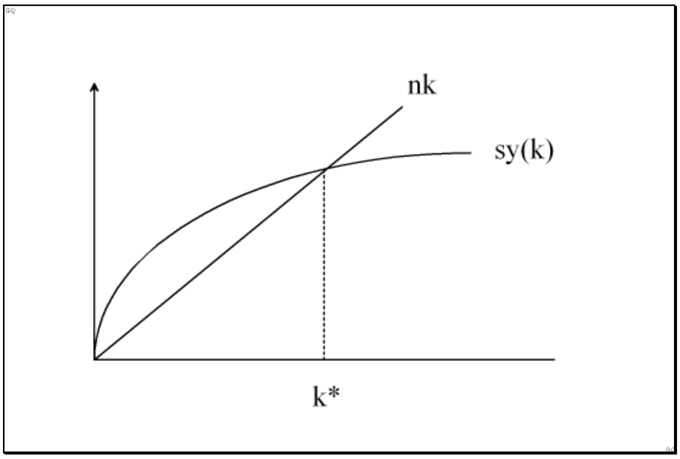


BILD 6

(i) Die erste Ableitung der Parabel y strebt für $k \to +0$ gegen $+\infty$, so dass in einer hinreichend kleinen Umgebung von Null die Kurve stets über der Graden liegt. Mit zunehmenden k nimmt auch y' ab und nähert sich asymptotisch der Null, so dass y an irgendeinem Punkt k^* die Grade nk schneiden muss. Die Darstellung ist also allgemeingültig unter den gegebenen Voraussetzungen.

(ii) Links neben k^* ist $\dot{k} = sy(k) - nk > 0$, also wächst k. Rechts von k^* ist $\dot{k} = sy(k) - nk < 0$, also fällt k. An der Stelle k^* ist $\dot{k} = sy(k) - nk = 0$, hier ist also k stationär. Insgesamt bedeutet das, dass ein stabiles Gleichgewicht am Punkt k^* vorliegt.

Folgerung:
Wenn k (das Verhältnis von K zu L) konstant ist, hat K dieselbe Wachstumsrate wie L, also n. *K wächst im Gleichgewicht mit derselben „natürlichen" Wachstumsrate wie die Beschäftigung.*

Das lässt sich auch explizit zeigen. Wir beginnen noch einmal mit der Gleichung für das Kapitalwachstum und setzen dort die Cobb-Douglas-Funktion ein:

$$\dot{K} = sK^a L_0^b e^{nbt} \text{ mit } b = 1 - a . \tag{7}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet:

$$K(t) = \left[K_0^b - \frac{s}{n} L_0^b + \frac{s}{n} L_0^b e^{nbt} \right]^{\frac{1}{b}} \tag{8}$$

Für große t gilt:

$$K(t) \approx \left(\frac{s}{n} \right)^{\frac{1}{b}} L_0 e^{nt} . \tag{9}$$

Im nach unendlich langer Zeit erreichbaren Gleichgewicht ist also

$$k^* = \left. \frac{K}{L} \right|_{t \to \infty} = \left(\frac{s}{n} \right)^{\frac{1}{b}} \tag{10}$$

Für den (realen) Output ergibt sich:

$$Y = K^a L_0^b e^{nbt} = L_0^b e^{nbt} \left[K_0^b - \frac{s}{n} L_0^b + \frac{s}{n} L_0^b e^{nbt} \right]^{\frac{a}{b}} \tag{11}$$

Für große t reduziert sich der Klammerausdruck wie oben, und für Y ergibt sich die Näherung:

$$Y \approx L_0^b e^{nbt} \left(\frac{s}{n} \right)^{\frac{a}{b}} L_0^a e^{ant} = \left(\frac{s}{n} \right)^{\frac{a}{b}} L_0 e^{nt} \tag{12}$$

Der (reale) Output wächst folglich mit der natürlichen Rate n.

Für den Output je Beschäftigteneinheit ergibt sich der Gleichgewichtswert

$$y(k^*) = \left.\frac{Y}{L}\right|_{t\to\infty} = \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{a}{b}} \tag{13}$$

Der Kapitalkoeffizient im Gleichgewicht ist wegen (10) und (13):

$$\frac{K}{Y} = \frac{K}{L}\frac{L}{Y} = \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{1}{b}}\left(\frac{s}{n}\right)^{-\frac{a}{b}} = \frac{s}{n} \tag{14}$$

Bedenkt man, dass $w = (1-a)k^a$ sowie $r = ak^{a-1}$, und setzt in diese Beziehungen den Gleichgewichtswert für k ein, so erhält man für den Reallohnsatz im Gleichgewicht:

$$w = (1-a)\left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{a}{b}}, \tag{15}$$

und für die Profitrate im Gleichgewicht:

$$r = a\left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{a-1}{b}} = a\frac{n}{s} \tag{16}$$

Das Verhältnis von Lohnsatz und Profitrate zueinander ist im Gleichgewicht konstant:

$$\frac{w}{r} = \frac{(1-a)}{a}\left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{1}{b}}. \tag{17}$$

Zerlegt man das Sozialprodukt pro (Arbeitnehmer-) in seine beiden Bestandteile

$$y = k^a = \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{a}{b}} = w + rk = (1-a)\left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{a}{b}} + a\left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{a-1}{b}}\left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{1}{b}} = (1-a)\left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{a}{b}} + a\left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{a}{b}} \tag{18}$$

dann sieht man daran noch einmal: Die Anteile von Lohn und Profit am Einkommen sind konstant – auch im Gleichgewicht.

4. **Neutraler technologischer Fortschritt**

Einen einfachen Ansatz für technologischen Fortschritt stellt die Produktionsfunktion (reales Sozialprodukt)

$$Y = e^{gt} Y(L, K) \tag{1}$$

dar. Dabei wird vereinfachend angenommen, dass die marginalen Raten der Substitution vom technischen Fortschritt nicht beeinflusst werden (= Definition des *neutralen* technischen Fortschritts).[6] Die oben abgeleitete Differentialgleichung für die Kapitalintensität lautet unter dieser Bedingung:

$$\dot{k} = se^{gt} y(k) - nk\,, \tag{2}$$

woraus man schon sehen kann, dass sich jetzt der Gleichgewichtspunkt unter der Bedingung $g > 0$ im Koordinatensystem ständig nach Nordosten verschiebt: Die Kapitalintensität nimmt zu.

Die Differentialgleichung für *K* lautet:

$$\dot{K} = sK^a L_0^b e^{(nb+g)t} \quad . \tag{3}$$

Wie man leicht sieht, ist die Lösung der Differentialgleichung gegeben durch:

$$K(t) = \left[K_0^b - \frac{bs}{nb+g} L_0^b + \frac{bs}{nb+g} L_0^b e^{(nb+g)t} \right]^{\frac{1}{b}} \tag{4}$$

Für große *t* gilt:

$$K(t) \approx \left(\frac{bs}{nb+g} \right)^{\frac{1}{b}} L_0 e^{\left(n+\frac{g}{b}\right)t} \quad . \tag{5}$$

„In the long run the capital stock increases at the relative rate $n+\frac{g}{b}$ (compared with *n* in the case of no technological change)." (Solow 1956: 85).

Die Funktion für den realen Output wird jetzt folgendermaßen notiert:

$$Y = K^a L_0^b e^{(nb+g)t} \tag{6}$$

---

[6] Diese und die folgende Darstellungen basieren u.a. auf R. M. Solow: Technical Change and the Aggregate Production Function. In: The Review of Economics and Statistics, Vol. 39, No. 3 (Aug., 1957), pp. 312-320.

Bei großen t kann man die ersten beiden Terme in der Funktion für das Kapital (4) vernachlässigen, so dass (5) gilt. Einsetzen in (6) ergibt unter dieser Bedingung:

$$Y = L_0^{b+a}\left(\frac{bs}{nb+g}\right)^{\frac{a}{b}} e^{a\left(n+\frac{g}{b}\right)t} e^{(nb+g)t} = L_0\left(\frac{bs}{nb+g}\right)^{\frac{a}{b}} e^{\left(n+\frac{ag}{b}+g\right)t} = L_0\left(\frac{bs}{nb+g}\right)^{\frac{a}{b}} e^{\left(n+\frac{g}{b}\right)t} \qquad (7)$$

Die Wachstumsrate des realen Sozialprodukts ist im Gleichgewicht dieselbe wie die des „capital stock".

Wie verhält sich $k = \frac{K}{L}$ im Gleichgewicht (die Unabhängige der Clark-Ramsey-Parabel)? Dazu muss der angenäherte Ausdruck (5) für das Kapital durch den Ansatz für Arbeit geteilt werden. Wie man leicht sieht ist:

$$k(t) = \frac{K(t)}{L(t)} = \left(\frac{bs}{nb+g}\right)^{\frac{1}{b}} e^{\frac{g}{b}t}. \qquad (8)$$

Der Gleichgewichtspunkt im Diagramm mit der Clark-Ramsey-Parabel wandert mit der Zeit auf der Abszisse nach rechts. Für das Einkommen pro Kopf (Beschäftigteneinheit) ergibt sich aus der Formel (7) für den Gleichgewichtspunkt:

$$y(t) = \left(\frac{bs}{nb+g}\right)^{\frac{a}{b}} e^{\frac{g}{b}t} \qquad (9)$$

Der Gleichgewichtspunkt wandert auf der Ordinate nach oben. Die Steigung der dabei erzeugten Geraden ist

$$\frac{y(t)}{k(t)} = m = \left(\frac{bs}{nb+g}\right)^{-1} = \frac{nb+g}{bs} \qquad (10)$$

M.a.W.: *Die Gleichgewichtszustände einer Volkswirtschaft erscheinen nicht als Parabel, sondern als eine Gerade.*

5. **Zeitliche Entwicklung der Lohnfunktion (ohne technischen Fortschritt)**

Aus der Cobb-Douglas Produktionsfunktion ergibt sich für den realen Output ohne technischen Fortschritt:

$$Y = K^a L_0^b e^{nbt} = L_0^b e^{nbt} \left[K_0^b - \frac{s}{n} L_0^b + \frac{s}{n} L_0^b e^{nbt} \right]^{\frac{a}{b}}$$

Und damit für den Output pro Arbeitnehmer, also für die Produktivität:

$$y = K^a L_0^{-a} e^{-nat} = L_0^{-a} e^{-nat} \left[K_0^b - \frac{s}{n} L_0^b + \frac{s}{n} L_0^b e^{nbt} \right]^{\frac{a}{b}}$$

Schließlich erhalten wir für den Lohnsatz (siehe Gl. 9, Abschnitt 2):

$$w = bL_0^{-a} e^{-nat} \left[K_0^b - \frac{s}{n} L_0^b + \frac{s}{n} L_0^b e^{nbt} \right]^{\frac{a}{b}}.$$

Es sei daran erinnert, dass $b = 1 - a$ gilt.

6. **Empirische Überprüfung**

Die Überprüfung erfolgt anhand der folgenden makroökonomischen Variablen:
K: Nettoanlagevermögen zu Wiederbeschaffungspreisen, in Milliarden €
Y: Nationaleinkommen, in Milliarden €, deflationiert
EW: Anzahl der Erwerbstätigen (Inländerkonzept), in 1000
YAN: Arbeitnehmerentgelt in Milliarden €, deflationiert
YUV: Einkommen aus Unternehmertätigkeit und Vermögen in Milliarden €, deflationiert

Datenquelle:
Statistisches Bundesamt, Lange Reihen, 1970-2007

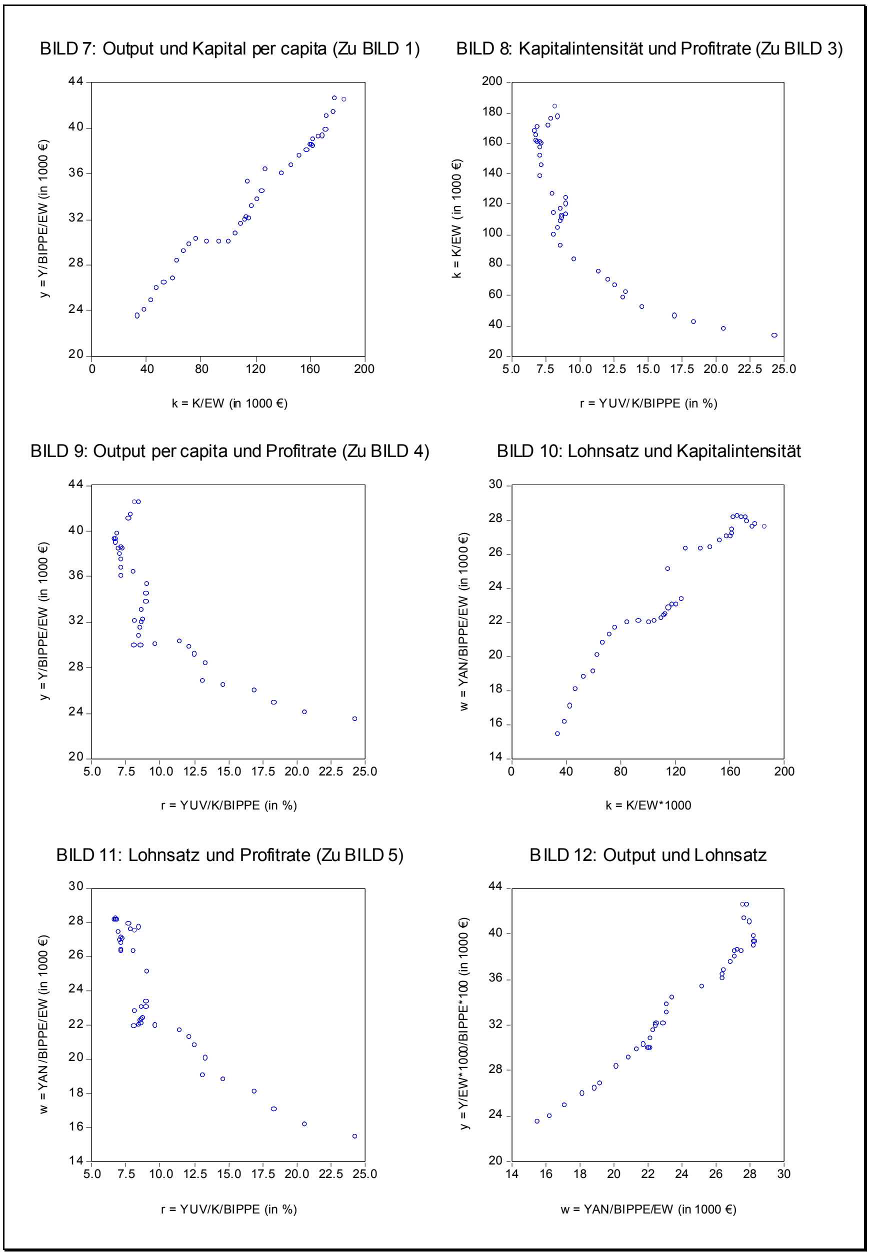


BILD 7-12: Plots der empirischen Verläufe

Bezeichnung	Eigenschaften	x-y-Diagramm	Theorie	BILD	Empirie	BILD
Clark-Ramsey	y'>0; y''<0	y; k	Parabel	1, 2	Gerade (?)	7
	dr/dk = y''<0	k; r	inv. Zus.	3	inv. Zus.	8
	dy/dr = y'/y''<0	y; r	inv. Zus.	4	inv. Zus.	9
	dw/dk = -ky''>0	w; k	Parabel	--	Parabel	10
	dw/dr = -k	w; r	inv. Zus..	5	inv. Zus.	11
	dy/dw = 1/(1-a)	y;w	lin. Zus.	--	lin. Zus.(?)	12

Tabelle 1: Erwarteter und beobachteter Verlauf der neoklassischen Produktionsfunktion und ihrer Ableitungen

[Programm: Clark_Ramsey_2.prg]

7. **Die Nelson-Winter-Kritik**

(Beschreibung der Fakten durch Nelson und Winter (vor 1982!) und ihre Kritik an der neoklassischen Produktionsfunktion. Vergleich mit der Datenlage 1970-2007)

Quelle: Richard R. Nelson and Sidney G. Winter: An Evolutionary Theory of Economic Change. 1982.

„Output (gross national product) has been growing at roughly the same rate as capital [BILD 7] and at a faster rate than labor [BILD 13]; hence, the capital-output ratio has been constant [BILD 14] and output per worker and the capital-labor ratio have risen in the same proportion [BILD 7]. Factor shares have remained constant [BILD 15]; thus the rate of return on capital has been constant and the wage rate has risen [BILD 16]. These ‚facts' very roughly characterize the Western economic experience that the growth accounting exercises seek to explain.
These facts are inconsistent with an explanation that interprets growth solely in terms of movement along a neoclassical production function. The rise in output per worker would have been less than the rise in the capital-labor ratio, whereas in fact worker productivity has grown at the same rate as capital intensity… Thus, the production function must have shifted“. (199)

„…it is not merely that movements along preexisting production functions explain little of experienced growth. It is that the idea of movements along the production function into previously unexperienced regions – the conceptual core of the neoclassical explanation of growth – must be rejected as a theoretical concept." (201)

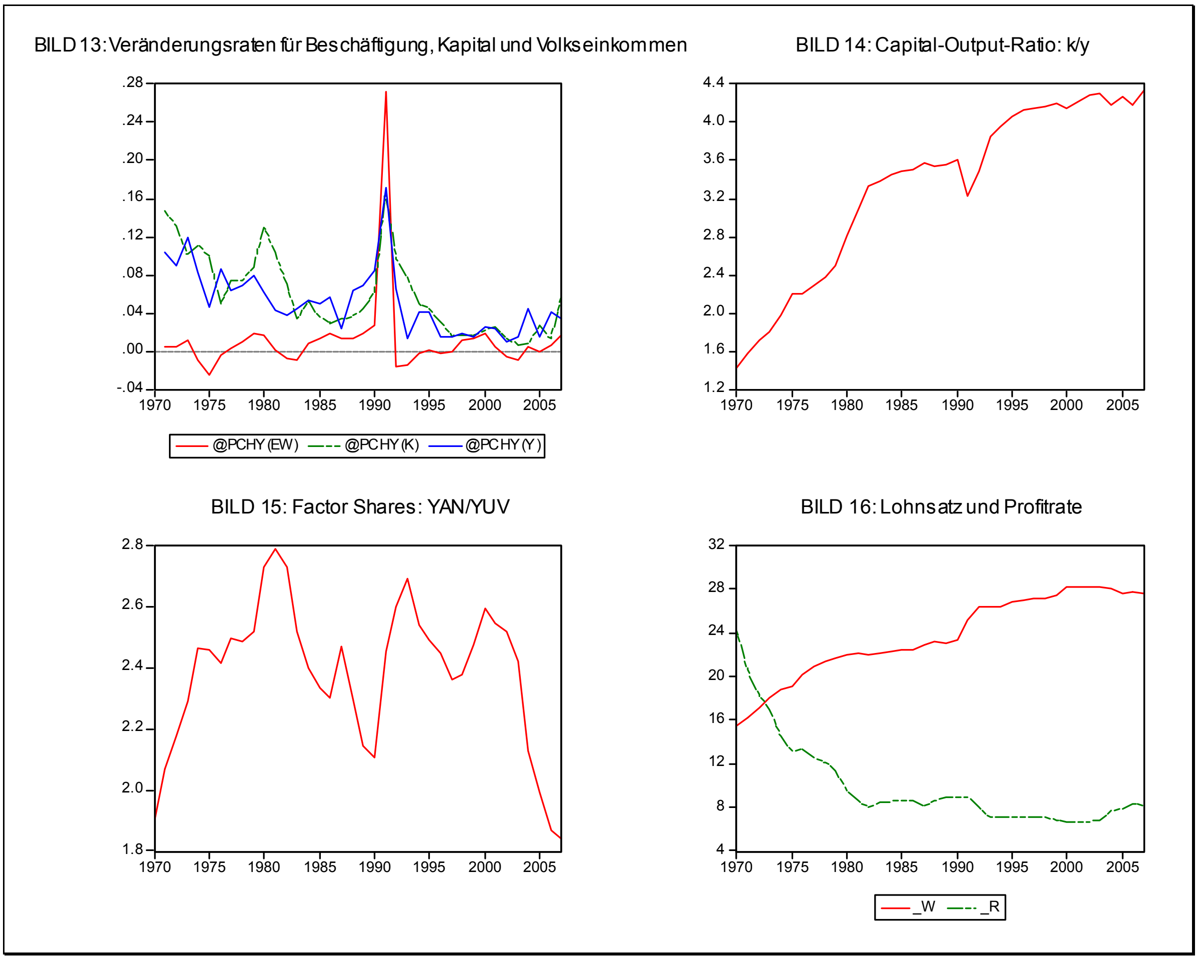


BILD 13-16: Die von Nelson-Winter behaupteten „charakteristischen Fakten" westlicher Volkswirtschaften

8. **Die entsprechende Regression**

Dependent Variable: @LOG(Y/BIPPE*100)
Method: Least Squares
Date: 10/23/09 Time: 11:00
Sample: 1970 2007
Included observations: 38
@LOG(Y/BIPPE*100) = C(1) + C(2)*@LOG(EW) + C(3)*@LOG(K) + C(4)
*JAHR

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	-18.15867	2.587158	-7.018772	0.0000
C(2)	0.955992	0.047521	20.11745	0.0000
C(3)	0.151968	0.023515	6.462604	0.0000
C(4)	0.007029	0.001482	4.743261	0.0000

R-squared	0.996772	Mean dependent var	6.968234
Adjusted R-squared	0.996487	S.D. dependent var	0.329237
S.E. of regression	0.019513	Akaike info criterion	-4.936191
Sum squared resid	0.012945	Schwarz criterion	-4.763813
Log likelihood	97.78763	Hannan-Quinn criter.	-4.874860
F-statistic	3499.896	Durbin-Watson stat	0.587107
Prob(F-statistic)	0.000000		

TABELLE 2

…zeigt im Großen und Ganzen die von der neoklassischen Theorie erwarteten Merkmale: Die Parameterwerte liegen im Bereich 0…1, addieren sich allerdings nicht zu 1. Die DW-Statistik signalisiert eine starke Autokorrelation, die die hohe Signifikanz der Parameterwerte etwas in Frage stellt. Der „technische Fortschritt“ ist mit durchschnittlich 0,7% pro Jahr am Wachstum des realen Volkseinkommens beteiligt.

[Grafiken: clark_ramsey_2.prg]

9. **Solows Rekonstruktion der Produktionsfunktion**

Unter der Voraussetzung neutralen technischen Fortschritts, ausgedrückt durch die verallgemeinerte Funktion

$$Y = T(t)\, f(K, L), \tag{1}$$

und der Annahme, dass „den Faktoren" das jeweilige marginale Produkt bezahlt wird, konstruiert Solow eine Methode, mit deren Hilfe man zwischen, dem Einfluss des technischen Fortschritts und dem der Veränderungen der Kapitalintensität auf den Output pro Kopf differenzieren kann.[7] Beobachtet werden an den beiden Zeitpunkten 1 und 2 die beiden Punkte $P_1(k_1, y_1)$ und $P_2(k_2, y_2)$ im *y*-*k*-Diagramm. Gesucht ist der Punkt $P_{12}(k_1, y_{12})$ und vor allem die Differenz $\Delta T = P_1 P_{12}$, die den Produktivitätszuwachs widerspiegelt, der allein auf das Konto des technischen Fortschritts geht.

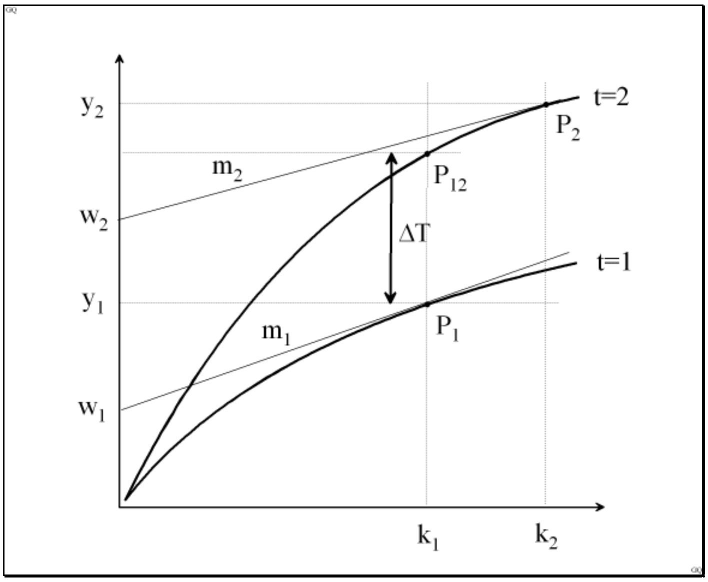


BILD 17

Der y-Wert von P_{12} wird mit Hilfe der Tangente an den Punkt P_2 angenähert. Die Steigung dieser Tangente ist

$$m_2 = \frac{y_2 - w_2}{k_2} = \frac{r_2 k_2}{k_2} = r_2. \tag{2}$$

Als Approximation für den y-Wert des Punktes P_{12} ergibt sich:

[7] Vgl. Solow 1957. Anstelle von *q* verwende ich hier *y* als Symbol für den Output und identifiziere ihn aus strukturellen Gründen mit dem Volkseinkommen (Nettonationalprodukt, vgl. ebd. 314). Anstelle von Solows A für den technischen Fortschritt wird hier T benutzt.

$$y_{12} \approx y_2 - \frac{\partial y}{\partial k} \Delta k \,, \tag{3}$$

und für die gesuchte Differenz

$$\Delta T = y_{12} - y_1 \,. \tag{4}$$

Setzt man (3) in (4) ein, erhält man:

$$\Delta T \approx \Delta y - \frac{\partial y}{\partial k} \Delta k \,. \tag{5}$$

Man gelangt zu Veränderungsraten, wenn man (5) durch $T = y_1$ teilt:

$$\frac{\Delta T}{T} \approx \frac{\Delta y}{y_1} - \frac{\partial y}{\partial k} \frac{k_1}{y_1} \frac{\Delta k}{k_1} \,. \tag{6}$$

An dieser Stelle kommt die Voraussetzung zum Tragen, dass den Faktoren ihr jeweiliges marginales Produkt bezahlt wird, d.h. es gilt:

$$\frac{\partial y}{\partial k} = r \,. \tag{7}$$

Und damit ergibt sich, dass

$$\frac{\partial y}{\partial k} \frac{k_1}{y_1} = \frac{r k_1}{y_1} = \frac{r K_1}{Y_1} = w_K \,, \tag{8}$$

wobei w_K der Anteil der Kapitaleinkommen am Gesamteinkommen Y ist. (Streng genommen handelt es sich hier um das Einkommen Y_1. Dem aufmerksamen Leser wird aufgefallen sein, dass sich die Profitrate r „streng genommen" auf den Punkt P_2 bezieht. Solow unterstellt hier stillschweigend hinreichend kleine Änderungen, so dass die Profitrate wie der Anteil der Kapitaleinkommen als konstant angesehen werden können.)

Mit (8) lässt sich (6) angenähert wie folgt schreiben:

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{T}}{T} + w_K \frac{\dot{k}}{k} \,. \tag{9}$$

Das ist die gesuchte Zerlegung der zeitlichen Veränderung des Outputs pro Kopf in die Veränderungsrate des technischen Fortschritts und die (gewichtete) Veränderungsrate der Kapitalintensität. Man erhält die Veränderungsrate des technischen Fortschritts aus der Wachstumsrate des Einkommens minus dem gewichteten Wachstum des Kapitalstocks, wobei die Wichtung durch den Anteil des Kapitaleinkommens am Gesamteinkommen *Y* gegeben ist.

$$\frac{\dot{T}}{T} = \frac{\dot{y}}{y} - w_K \frac{\dot{k}}{k}$$

Die Berechnung der Rate des technischen Fortschritts für die Bundesrepublik Deutschland zeigt folgende Tabelle:

Jahr	Kapitalstock in Preisen von 2000	Anteil des Kapital-einkommens*	Volkseinkommen je Erwerbstätigen	Kapital-intensität	$\Delta T/T$ †	$T(t)$
1970	3798.450	0.216697	23.57410	142.2907	NA	1.000000
1971	3999.130	0.204456	24.07755	149.1600	0.011485	1.011485
1972	4206.990	0.196784	24.98510	156.0804	0.028563	1.040048
1973	4415.120	0.188871	26.01166	161.8980	0.034047	1.074095
1974	4607.350	0.174220	26.48871	170.5668	0.009011	1.083107
1975	4778.870	0.176817	26.89842	181.4715	0.004163	1.087270
1976	4945.830	0.186718	28.40700	188.5778	0.048772	1.136042
1977	5117.260	0.183603	29.22637	194.6911	0.022892	1.158934
1978	5293.760	0.187864	29.88509	199.4409	0.017955	1.176889
1979	5478.410	0.189327	30.32773	202.5365	0.011873	1.188762
1980	5669.340	0.173350	30.07654	206.1953	-0.011414	1.177348
1981	5851.920	0.169699	30.06641	212.5575	-0.005573	1.171775
1982	6016.930	0.174777	30.05715	220.1423	-0.006545	1.165231
1983	6174.620	0.193197	30.84482	227.9804	0.019327	1.184558
1984	6330.300	0.205126	31.59364	231.7009	0.020929	1.205487
1985	6481.050	0.213304	32.00501	233.9138	0.010984	1.216471
1986	6632.380	0.217318	32.22706	234.8826	0.006038	1.222508
1987	6786.860	0.203313	32.14450	237.0376	-0.004427	1.218081
1988	6946.770	0.221341	33.16286	239.2550	0.029610	1.247692
1989	7118.420	0.239083	33.83072	240.6904	0.018704	1.266396
1990	7307.090	0.245090	34.51265	240.3174	0.020537	1.286933
1991	8193.970	0.218624	35.38831	211.9276	0.051199	1.338132
1992	8451.510	0.202780	36.45609	222.0225	0.020514	1.358646
1993	8699.380	0.193027	36.13960	231.7301	-0.017121	1.341525
1994	8935.150	0.203594	36.81705	238.3469	0.012932	1.354457
1995	9167.820	0.207271	37.59704	244.1757	0.016117	1.370574
1996	9389.900	0.211119	38.06693	250.8388	0.006737	1.377311
1997	9606.580	0.217608	38.56476	256.9291	0.007794	1.385105
1998	9823.390	0.215806	38.62314	259.6445	-0.000767	1.384338
1999	10045.78	0.207925	38.53035	262.0251	-0.004309	1.380029
2000	10274.60	0.197944	39.04990	263.1948	0.012601	1.392630
2001	10494.12	0.200873	39.33254	267.6457	0.003841	1.396470
2002	10679.75	0.202218	39.37992	273.8819	-0.003507	1.392963
2003	10846.09	0.208870	39.87027	280.7468	0.007216	1.400180
2004	11009.56	0.236985	41.11107	283.7808	0.028560	1.428740
2005	11168.05	0.249549	41.47279	288.1557	0.004951	1.433691
2006	11344.26	0.266347	42.63776	290.6996	0.025739	1.459430

TABELLE 3

*Anteil des vom Unternehmerlohn bereinigten Kapitaleinkommen am Volkseinkommen
† Wachstumsrate der totalen Faktorproduktivität (vgl. Blanchard / Illing, 380 f.).

Durch Rekonstruktion der vom technischen Fortschritt bereinigten Daten y_kor stellt für jedes Jahr die Produktionsfunktion dar, die durch den technischen Fortschritt verschoben wird: bezeichnen wir sie als „wahre Produktionsfunktion“. BILD 18 zeigt die wahren Produktionsfunktionen für 1970 und 1990:

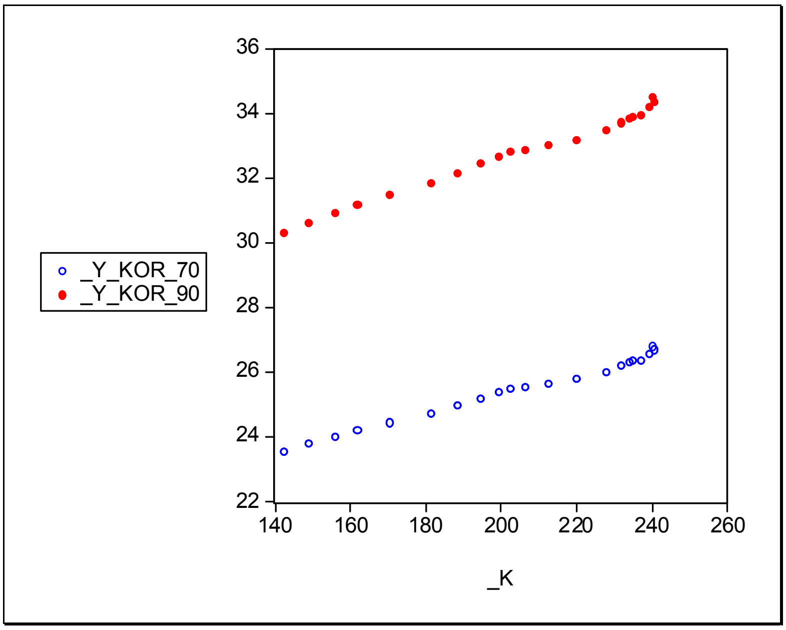


BILD 18: Wahre Produktionsfunktionen 1970 und 1990

Multiplikation der wahren Produktionsfunktion für 1970 mit dem Faktor für den technischen Fortschritt T ergibt also eine Schar von Produktionsfunktionen – für jeden Zeitpunkt eine.

BILD 18 zeigt nur ansatzweise die erwartete konkave Kurve. Dabei möge man bedenken, dass wir nur einen kleinen Ausschnitt aus der Produktionsfunktion sehen, und zwar „weit draußen“, d.h. bei hohen Werten, bei denen die Funktion fast linear verläuft. Eine Abweichung vom erwarteten Kurvenverlauf stellt die konvexe Delle auf der rechten Seite der Kurve dar.

10. **Überprüfung der „wahren“ Produktionsfunktion**

Als Nächstes können wir die Tangenten an die jeweiligen Zeitpunkte mit Hilfe einer linearen Regression berechnen und die Schnittpunkte mit der Ordinate bestimmen. Diese müssen mit den Lohnsätzen übereinstimmen, wenn die Annahme, dass den Faktoren das Grenzprodukt bezahlt wird, richtig ist – und wenn die Produktionsfunktion richtig ermittelt worden ist. Die folgende Tabelle zeigt die Übereinstimmung der so bestimmten Lohnsätze mit den beobachteten Werten:

Lohnsatz am Anfang einer Periode, erwarteter Lohnsatz, Lohnsatz am Ende einer Periode				
Von	bis	w_anf	w_erw	w_end
1970	1971	18.47	18.56	19.2
1971	1972	19.15	18.89	20.1
1972	1973	20.07	19.54	21.1
1973	1974	21.10	20.30	21.9
1974	1975	21.87	20.64	22.1
1975	1976	22.14	20.88	23.1
1976	1977	23.10	21.93	23.9
1977	1978	23.86	22.47	24.3
1978	1979	24.27	22.88	24.6
1979	1980	24.59	23.17	24.9
1980	1981	24.86	23.04	25.0
1981	1982	24.96	23.05	24.8
1982	1983	24.80	23.05	24.9
1983	1984	24.89	23.52	25.1
1984	1985	25.11	23.99	25.2
1985	1986	25.18	24.24	25.2
1986	1987	25.22	24.38	25.6
1987	1988	25.61	24.33	25.8
1988	1989	25.82	24.95	25.7
1992	1993	29.06	25.85	29.2
1993	1994	29.16	25.71	29.3
1994	1995	29.32	26.10	29.8
1995	1996	29.80	26.55	30.0
1996	1997	30.03	26.83	30.2
1997	1998	30.17	27.08	30.3
1998	1999	30.29	27.12	30.5
1999	2000	30.52	27.07	31.3
2000	2001	31.32	27.38	31.4
2001	2002	31.43	27.58	31.4
2002	2003	31.42	27.65	31.5
2003	2004	31.54	27.90	31.4
2004	2005	31.37	28.55	31.1
2005	2006	31.12	28.73	31.3

TABELLE 4

Offenbar passen Solows Überlegungen nicht ganz zu den Verhältnissen in der bundesrepublikanischen Volkswirtschaft. Man kann aber auch nicht sagen, dass sie an dieser Realität völlig vorbei gehen.

Die Ablehnung der „theoretischen Idee" (Nelson/Winter) schließt nicht aus, dass die empirische Anwendung u. U. (siehe Abschnitt 8) hervorragende Ergebnisse liefert, wenn man gewisse Voraussetzungen (wie zum Beispiel konstante Skalenerträge) fallen lässt. Verständlicherweise leidet die ursprüngliche Klarheit und Stringenz der Theorie unter dieser bei den Empirikern oft zu beobachtenden pragmatischen Einstellung. [Programm: Clark_Ramsey_6.prg]